Ejercicios de producto interno

1. En $\mathbb{R}^2$ consideremos $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

   a) Comprobar que $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   b) Hallar la distancia entre $u = (2, 1)$ y $v = (3, -2)$.

   c) Hallar el ángulo entre $u = (1, 0)$ y $v = (-1, 1)$.

   d) ¿Los vectores (1,0) y (0,1) son ortogonales?

   e) Hallar todos los vectores $u \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|u\| = 3$ y $\langle u, (3, -1)\rangle = 0$.

   a) Comprobemos los axiomas de producto interno

   - $\langle \mathrm{x} + \mathrm{z}; \mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{x}; \mathrm{y}\rangle + \langle \mathrm{z}; \mathrm{y}\rangle$ ya que
   $$\langle \mathrm{x} + \mathrm{z}; \mathrm{y}\rangle = (\mathrm{x} + \mathrm{z})^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay} = (\mathrm{x}^{\mathrm{T}} + \mathrm{z}^{\mathrm{T}})\mathrm{Ay} = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay} + \mathrm{z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay} = \langle \mathrm{x}; \mathrm{y}\rangle + \langle \mathrm{z}; \mathrm{y}\rangle$$
   - $\langle \mathrm{kx}; \mathrm{y}\rangle = \mathrm{k}\,\langle \mathrm{x}; \mathrm{y}\rangle$ ya que
   $$\langle \mathrm{kx}; \mathrm{y}\rangle = (\mathrm{kx})^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay} = \mathrm{kx}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay} = \mathrm{k}\,\langle \mathrm{x}; \mathrm{y}\rangle$$
   - $\langle \mathrm{x}; \mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{y}; \mathrm{x}\rangle$ ya que al ser A simétrica se verifica
   $$\langle \mathrm{x}; \mathrm{y}\rangle = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay} = (\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ay})^{\mathrm{T}} = \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} = \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax} = \langle \mathrm{y}; \mathrm{x}\rangle$$
   - $\langle \mathrm{x}; \mathrm{x}\rangle \geq 0$ para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2$ y $\langle \mathrm{x}; \mathrm{x}\rangle = 0$ si y sólo si $\mathrm{x} = (0\,0)^T$ ya que
     - $\langle \mathrm{x}; \mathrm{x}\rangle = \mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax} = \mathrm{x}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{x} = \mathrm{x}_1^2 + 4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + 5\mathrm{x}_2^2 = \mathrm{x}_1^2 + 2\mathrm{x}_1(2\mathrm{x}_2) + 4\mathrm{x}_2^2 + \mathrm{x}_2^2$
       $\langle \mathrm{x}; \mathrm{x}\rangle = (\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2)^2 + \mathrm{x}_2^2 \geq 0$ para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2$
     - $\mathrm{x} = (0\,0)^{\mathrm{t}} \Rightarrow \langle \mathrm{x}; \mathrm{x}\rangle = 0$
     - $\langle \mathrm{x}; \mathrm{x}\rangle = 0 \Rightarrow (\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2)^2 + \mathrm{x}_2^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 = 0\ y\ \mathrm{x}_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = (0\,0)^T$

   b) Recordemos que la norma de un vector es $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ y distancia entre dos vectores u y v es $d(u, v) = \|v - u\|$.
   En este caso $d(u, v) = \|(3, -2) - (2, 1)\| = \|(1, -3)\|$
   Calculamos
   $\|(1, -3)\|^2 = \langle (1, -3), (1, -3)\rangle = (1\ \ -3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-5\ \ -13) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 34$
   Entonces $d(u, v) = \sqrt{34}$.

   c) El ángulo $\theta \in [0, \pi]$ entre dos vectores no nulos u y v verifica $cos(\theta) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$
   En este caso, $cos(\theta) = \dfrac{\langle (1, 0), (-1, 1)\rangle}{\|(1, 0)\|\,\|(-1, 1)\|}$
   Calculamos:
   - $\langle (1, 0), (-1, 1)\rangle = (1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$
   - $\|(1, 0)\|^2 = \langle (1, 0), (1, 0)\rangle = (1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, entonces $\|(1, 0)\| = 1$.
   - $\|(-1, 1)\|^2 = \langle (-1, 1), (-1, 1)\rangle = (-1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$, entonces $\|(-1, 1)\| = \sqrt{2}$.

Por lo tanto, $cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

d) Los vectores (1,0) y (0,1) serían ortogonales con este producto interno si $\langle(1,0),(0,1)\rangle = 0$. Veamos si ésto sucede.
$\langle(1,0),(0,1)\rangle = (1\ 0)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (1\ 2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2 \neq 0$
Entonces (1,0) y (0,1) no son ortogonales con este producto interno.

e) Buscamos los vectores $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ortogonales al (3,-1) de norma 3.

$$\langle(a,b),(3,-1)\rangle = (a\ b)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = (a\ b)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = a + b = 0$$

Entonces $b = -a$ y $u = (a, -a) = a(1, -1)$. Buscamos ahora que $\|u\| = 3$

$$3 = \|u\| = \|a(1,-1)\| = |a|\,\|(1,-1)\| = |a|\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad |a| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto $u = \dfrac{3}{\sqrt{2}}(1,-1)$ o $u = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

2. Sea en $\mathbb{R}^2$ $\langle \mathrm{x};\mathrm{y}\rangle = \mathrm{x^tAy}$ con $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$, $\mathrm{a} > 0$, $\det(\mathrm{A}) > 0$

a) Probar que la expresión define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

b) Si $B = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es el área del paralelogramo de lados v_1 y v_2?

a) Comprobemos los axiomas de producto interno:

- $\langle \mathrm{x+z};\mathrm{y}\rangle = (\mathrm{x+z})^{\mathrm{t}}\mathrm{Ay} = (\mathrm{x^t+z^t})\mathrm{Ay} = \mathrm{x^tAy} + \mathrm{z^tAy} = \langle \mathrm{x};\mathrm{y}\rangle + \langle \mathrm{z};\mathrm{y}\rangle$
- $\langle \mathrm{kx};\mathrm{y}\rangle = (\mathrm{kx})^{\mathrm{t}}\mathrm{Ay} = \mathrm{kx^tAy} = \mathrm{k}\langle \mathrm{x};\mathrm{y}\rangle$
- $\langle \mathrm{x};\mathrm{y}\rangle = \mathrm{x^tAy} = (\mathrm{x^tAy})^{\mathrm{t}} = \mathrm{y^tAx} = \langle \mathrm{y};\mathrm{x}\rangle$ pues A es simétrica
- $\langle \mathrm{x};\mathrm{x}\rangle = x^tAx = x^t\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}x = a\mathrm{x}_1^2 + 2b\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + c\mathrm{x}_2^2 = a(\mathrm{x}_1^2 + 2\dfrac{b}{a}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \dfrac{c}{a}\mathrm{x}_2^2)$
  $\langle \mathrm{x};\mathrm{x}\rangle = a((\mathrm{x}_1 + \dfrac{b}{a}\mathrm{x}_2)^2 + \mathrm{x}_2^2(\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{a^2})) = a((\mathrm{x}_1 + \dfrac{b}{a}\mathrm{x}_2)^2 + \mathrm{x}_2^2(\dfrac{ac-b^2}{a^2})) \geq 0 \quad \forall \mathrm{x} \neq (0\,0)^{\mathrm{t}}$
  porque $a > 0$ y $det(A) = ac - b^2 > 0$
- $\mathrm{x} = (0\,0)^{\mathrm{t}} \ \Rightarrow \langle \mathrm{x};\mathrm{x}\rangle = 0$
- $\mathrm{a}((\mathrm{x}_1 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}_2)^2 + \mathrm{x}_2^2(\frac{\mathrm{ac-b^2}}{\mathrm{a^2}})) = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = (0\,0)^t$ pues $\mathrm{a} > 0$ y $\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2 > 0$

Luego, esta expresión define un producto interno en $\mathbb{R}^2$ si $a > 0$ y $det(A) > 0$.

b) La matriz del producto interno en la base $B = \{v_1, v_2\}$ es:

$$\mathrm{G_B} = \begin{pmatrix}\|v_1\|^2 & \langle v_1; v_2\rangle\\ \langle v_1; v_2\rangle & \|v_2\|^2\end{pmatrix}$$

Analizamos el determinante de $\mathrm{G_B}$:

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{G_B}) &= \|\mathrm{v}_1\|^2\,\|\mathrm{v}_2\|^2 - \langle \mathrm{v}_1;\mathrm{v}_2\rangle^2 = \|\mathrm{v}_1\|^2\,\|\mathrm{v}_2\|^2 - \|\mathrm{v}_1\|^2\,\|\mathrm{v}_2\|^2\cos^2(\alpha)\\ &= \|\mathrm{v}_1\|^2\,\|\mathrm{v}_2\|^2(1 - \cos^2(\alpha)) = \|\mathrm{v}_1\|^2\,\|\mathrm{v}_2\|^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha)\end{aligned}$$

Luego

$$\sqrt{\det(\mathrm{G_B})} = \|v_1\|\,\|v_2\|\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

pero ésta es el área del paralelogramo de lados v_1 y v_2.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[x]$, se define el producto escalar:

$$\langle p, q\rangle = p(2)q(2) + p'(2)q'(2)$$

a) Hallar la matriz del producto escalar relativa a la base $E = \{1, x\}$.

b) Calcular el ángulo y la distancia entre $p(x) = 1 - x$ y $q(x) = -2 + x$.

c) Dado el subespacio $S = gen\{3 - x\}$, calcular su complemento ortogonal $S^{\perp}$.

a) La matriz del producto escalar relativa a la base $E = \{1, x\}$ es

$$G_E = \begin{pmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle 1, x\rangle \\ \langle x, 1\rangle & \langle x, x\rangle \end{pmatrix}$$

Calculamos los productos necesarios:

- $\langle 1, 1\rangle = 1$ (reemplazamos en la fórmula de producto interno $p(x) = q(x) = 1$)
- $\langle 1, x\rangle = 2$ (reemplazamos en la fórmula de producto interno $p(x) = 1$ y $q(x) = x$). Como P_1 es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, tenemos que $\langle x, 1\rangle = \langle 1, x\rangle = 2$.
- $\langle x, x\rangle = 2^2 + 1^2$=5 (reemplazamos en la fórmula de producto interno $p(x) = q(x) = x$)

Entonces

$$G_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

b) El ángulo $\theta \in [0, \pi]$ entre p y q verifica $cos(\theta) = \dfrac{\langle p, q\rangle}{\|p\|\,\|q\|}$. En este caso

$$cos(\theta) = \frac{\langle 1 - x, -2 + x\rangle}{\|1 - x\|\,\|-2 + x\|}$$

Calculamos:

- $\langle 1 - x, -2 + x\rangle = ([1 - x]^E)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} [-2 + x]^E = (1\ \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\langle 1 - x, -2 + x\rangle = (-1\ \ -3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$
- $\|1 - x\|^2 = \langle 1 - x, 1 - x\rangle = ([1 - x]^E)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} [1 - x]^E = (1\ \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  $\|1 - x\|^2 = (-1\ \ -3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$, entonces $\|1 - x\| = \sqrt{2}$.
- $\|-2 + x\|^2 = \langle -2 + x, -2 + x\rangle = ([-2{+}x]^E)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} [-2{+}x]^E = (-2\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $\|-2 + x\|^2 = (0\ 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$, entonces $\|-2 + x\| = 1$.

Por lo tanto, $cos(\theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$.

La distancia entre p y q es

$$d(p, q) = \|q(x) - p(x)\| = \|-2 + x - (1 - x)\| = \|-3 + 2x\|$$

$\|-3 + 2x\|^2 = \langle -3 + 2x, -3 + 2x\rangle = ([-3{+}2x]^E)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} [-3{+}2x]^E = (-3\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|-3 + 2x\|^2 = (1\ 4) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$, entonces

$$d(p, q) = \|-3 + 2x\| = \sqrt{5}$$

c) Dado $S = gen\{3-x\}$, el complemento ortogonal de S es

$$S^\perp = \{p \in \mathbb{R}_1[x]/ \ \langle 3-x, p(x)\rangle = 0\}$$

Si $p(x) \in S^\perp$, $p(x) = a + bx$, se debe verificar que

$$\langle 3-x, p(x)\rangle = \langle 3-x, a+bx\rangle = ([3-x]^E)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} [a+bx]^E = (3 \ \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\langle 3-x, p(x)\rangle = (1 \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + b = 0$$

$$b = -a$$

$$p(x) = a - ax = a(1-x)$$

Entonces

$$S^\perp = gen\{1-x\}$$

4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial real $\mathbb{V}$ con producto interno. Sabiendo que

$$\|v_2\| = 2, \ \|v_3\| = 1, \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0, \ \langle v_2 - v_1, v_2 + v_1\rangle = 3, \ v_1 \perp (v_1 - v_2)$$

a) Hallar la matriz del producto interno relativa a la base B.

b) Dado $S = gen\{v_1 + v_2 + v_3\}$, hallar una base de $S^\perp$.

c) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean 0, v_1, $v_2 - \lambda v_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?

d) Calcular el área del triángulo de vértices $0, v_1, v_2$.

e) Calcular el área del triángulo de vértices v_1, v_2 y v_3.

a) Como el espacio vectorial $\mathbb{V}$ es real, la matriz del producto escalar relativa a la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle \\ \langle v_3, v_1\rangle & \langle v_3, v_2\rangle & \langle v_3, v_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_1, v_3\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_2, v_3\rangle \\ \langle v_1, v_3\rangle & \langle v_2, v_3\rangle & \langle v_3, v_3\rangle \end{pmatrix}$$

Podemos calcular los productos necesarios a partir de los datos del enunciado:

- $\|v_2\| = 2 \Leftrightarrow \|v_2\|^2 = 4 \Leftrightarrow \langle v_2, v_2\rangle = 4$
- $\|v_3\| = 1 \Leftrightarrow \|v_3\|^2 = 1 \Leftrightarrow \langle v_3, v_3\rangle = 1$
- $\langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0$
- $\langle v_2 - v_1, v_2 + v_1\rangle = \langle v_2, v_2\rangle + \langle v_2, v_1\rangle - \langle v_1, v_2\rangle - \langle v_1, v_1\rangle = 4 - \langle v_1, v_1\rangle = 3$.
  Entonces $\langle v_1, v_1\rangle = 1$.
- $v_1 \perp (v_1 - v_2) \Leftrightarrow \langle v_1, v_1 - v_2\rangle = 0$.
  Entonces $0 = \langle v_1, v_1 - v_2\rangle = \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_1, v_2\rangle = 1 - \langle v_1, v_2\rangle$ y $\langle v_1, v_2\rangle = 1$.

La matriz del producto interno relativa a la base B queda:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Queremos una base de $S^\perp = \{v \in \mathbb{V}/ \ \langle v, v_1 + v_2 + v_3\rangle = 0\}$.
Un vector genérico de $\mathbb{V}$ es de la forma $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Veamos que condiciones deben verificar a, b, c para perteneces a $S^\perp$:

$$\langle v, v_1+v_2+v_3\rangle = [v]_B^T G_B [v_1+v_2+v_3]_B = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a + 5b + c = 0$$

Obtenemos que $c = -2a - 5b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.
Entonces los vectores pertenecientes a $S^{\perp}$ son de la forma:

$$v = av_1 + bv_2 + (-2a - 5b)v_3 = a(v_1 - 2v_3) + b(v_2 - 5v_3),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.
Luego

$$S^{\perp} = gen\{v_1 - 2v_3, v_2 - 5v_3\}$$

Una base de $S^{\perp}$ es $B_{S^{\perp}} = \{v_1 - 2v_3, v_2 - 5v_3\}$ ya que es un conjunto de generadores de $S^{\perp}$ linealmente independiente.

c) Para que el triángulo de vértices 0, v_1 y $v_2 - \lambda v_1$ sea rectángulo es necesario que

$$\langle v_1, v_2 - \lambda v_1 \rangle = 0$$

Entonces

$$\langle v_1, v_2 \rangle - \lambda \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

$$1 - \lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

El rectángulo tiene vértices 0, v_1 y $v_2 - v_1$.

d) Por lo que vimos en el ejercicio 2, el área del paralelogramo de lados v_1 y v_2 podemos calcularla como

$$\sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$$

Entonces el área del triángulo de lados v_1 y v_2 es

$$Area = \frac{1}{2}\sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e) El área del triángulo de vértices v_1, v_2 y v_3 es la misma que el área del triángulo 0, $v_2 - v_1$ y $v_3 - v_1$. El área queda

$$Area = \frac{1}{2}\sqrt{\|v_2 - v_1\|^2 \|v_3 - v_1\|^2 - \langle v_2 - v_1, v_3 - v_1 \rangle^2}$$

Calculamos

- $\|v_2 - v_1\|^2 = (-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = (0\ 3\ 0)\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = 3$
- $\|v_3 - v_1\|^2 = (-1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = (-1\ \ -1\ 1)\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = 2$
- $\langle v_2 - v_1, v_3 - v_1 \rangle = (-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = (0\ 3\ 0)\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = 0$

Entonces

$$Area = \frac{\sqrt{6}}{2}$$